

Региональная олимпиада школьников

по математике 2021-2022 уч.г.

5-й класс,

Задача 1. В конкурсе чтецов участвовали Аня, Боря, Витя, Галя и Дима. Два хулигана Саша и Яша делали ставки на итоговые места. Саша объявил: Аня – первое, Боря – второй, Витя – третий, Галя – четвертая, Дима – пятый. На что Яша возразил: Галя – первая, Дима – второй, Аня – третья, Витя – четвертый, Боря – пятый. Оказалось, что Саша верно угадал места ровно троих ребят, а Яша – ровно двоих. Кто какое место занял в конкурсе чтецов?

Ответ: Аня – первое; Дима – второе; Витя – третье; Галя – четвертое; Боря – пятое.

Решение. Проанализируем предполагаемое распределение по местам

	Саша	Яша
Аня	1	3
Боря	2	5
Витя	3	4
Галя	4	1
Дима	5	2

Так как Саша угадал три правильных места, а Яша – два, то Аня, Боря и Витя не могут занимать первое, второе и третье место. Если Аня занимает первое место, то Витя занимает третье место, а Галя – четвертое. Тогда Дима – второе, а Боря – пятое.

Комментарии.

Баллы	Критерии оценивания задания № 1
7	Полное верное решение
6	Ход решения верный, все шаги решения выполнены, но даны неполные объяснения, не влияющие на ответ
4	Решение в целом верное и полное, однако, оно содержит ряд ошибок, либо пропуск отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений и дополнений
3	Решение начато правильно, но не доведено до конца
1	Записан верный ответ при отсутствии рассуждений (или при ошибочном рассуждении)
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют ИЛИ решение отсутствует, записан только номер задания

Задача 2. Найдите все решения ребуса (одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры):

$$\begin{array}{r} \text{УСНУЛ} \\ - \text{ТИГР} \\ \hline \text{ТССС} \end{array}$$

Ответ: $\begin{array}{r} \text{12715} \\ - \text{6493} \\ \hline \text{6222} \end{array}, \begin{array}{r} \text{12317} \\ - \text{6095} \\ \hline \text{6222} \end{array}, \begin{array}{r} \text{14512} \\ - \text{7068} \\ \hline \text{7444} \end{array}, \begin{array}{r} \text{14513} \\ - \text{7069} \\ \hline \text{7444} \end{array},$

$$\begin{array}{r} \text{16913} \\ - \text{8247} \\ \hline \text{8666} \end{array}, \begin{array}{r} \text{16719} \\ - \text{8053} \\ \hline \text{8666} \end{array}, \begin{array}{r} \text{17319} \\ - \text{8542} \\ \hline \text{8777} \end{array}.$$

Решение.

1) Так как число не может начинаться с цифры 0, то $У \neq 0$.

Уменьшаемое – пятизначное число, разность – четырехзначное, то $У = 1$.

$$\begin{array}{r} \text{1С*1*} \\ - \text{Т***} \\ \hline \text{ТССС} \end{array}$$

2) Так как буква С в записи встречается чаще других, рассмотрим все возможные ее значения.

3) $С = 0$

$$\begin{array}{r} \text{10*1Л} \\ - \text{Т**Р} \\ \hline \text{Т000} \end{array}$$

В этом случае буквы Л и Р должны иметь одно и то же значение, что противоречит условию.

4) $С \neq 1$. Разные цифры зашифрованы разными буквами.

5) $С = 2$.

$$\begin{array}{r} \text{12*1*} \\ - \text{Т***} \\ \hline \text{Т222} \end{array}$$

В этом случае $Т = 6$. Тогда для букв Л и Р возможны следующие варианты:

$Л = 9, Р = 7; Л = 7, Р = 5; Л = 5, Р = 3; Л = 0, Р = 8$.

$$\begin{array}{r} \text{12*19} \\ - \text{6**7} \\ \hline \text{6222} \end{array}, Г = 9 - \text{противоречит условию (уже } Л = 9)$$

$$\begin{array}{r} \text{12*17} \\ - \text{6**5} \\ \hline \text{6222} \end{array}, Г = 9, \text{ тогда для Н и И останутся цифры: } 0, 3, 4, 8. \text{ Получим, что}$$

$Н=3, И=0$:

$$\begin{array}{r} \underline{1\ 2\ 3\ 1\ 7} \\ \underline{6\ 0\ 9\ 5} \\ 6\ 2\ 2\ 2 \end{array}$$

Для случая $L = 5, P = 3$ получим:

$$\begin{array}{r} \underline{1\ 2\ 7\ 1\ 5} \\ \underline{6\ 4\ 9\ 3} \\ 6\ 2\ 2\ 2 \end{array}$$

Можно проверить, что других комбинаций при $C = 2$ нет.

6) $C = 3$. Тогда $T = 6, \Gamma = 8$ – наборов букв, удовлетворяющих всем условиям нет; аналогично, если $T = 6, \Gamma = 7$.

$$\begin{array}{r} \underline{1\ 3\ * \ 1\ *} \\ \underline{6\ * \ 8\ *} \\ 6\ 3\ 3\ 3 \end{array}, \quad \begin{array}{r} \underline{1\ 3\ * \ 1\ *} \\ \underline{6\ * \ 7\ *} \\ 6\ 3\ 3\ 3 \end{array}$$

7) $C = 4, T = 7, \Gamma = 6$

Для случая $L=2, P=8$:

$$\begin{array}{r} \underline{1\ 4\ * \ 1\ 2} \\ \underline{7\ * \ * \ 8} \\ 7\ 4\ 4\ 4 \end{array}$$

Тогда $H=5, I=0$:

$$\begin{array}{r} \underline{1\ 4\ 5\ 1\ 2} \\ \underline{7\ 0\ 6\ 8} \\ 7\ 4\ 4\ 4 \end{array}$$

Для случая $L=3, P=9$:

$$\begin{array}{r} \underline{1\ 4\ * \ 1\ 3} \\ \underline{7\ * \ * \ 9} \\ 7\ 4\ 4\ 4 \end{array}$$

Тогда $H=5, I=0$:

$$\begin{array}{r} \underline{1\ 4\ 5\ 1\ 3} \\ \underline{7\ 0\ 6\ 9} \\ 7\ 4\ 4\ 4 \end{array}$$

Больше вариантов нет.

8) $C = 5$

$$\begin{array}{r} \underline{1\ 5\ * \ 1\ *} \\ \underline{7\ * \ * \ *} \\ 7\ 4\ 4\ 4 \end{array}$$

$\Gamma = 7$ или $\Gamma = 6$.

Вариантов нет.

9) $C = 6$

$$\begin{array}{r} _1 6 * 1 * \\ _8 * * * \\ \hline 8 6 6 6 \end{array}$$

$T = 8, \Gamma = 5$ или $\Gamma = 4$.

$$\begin{array}{r} _1 6 9 1 3 \\ _8 2 4 7 \\ \hline 8 6 6 6 \end{array}$$

и

$$\begin{array}{r} _1 6 7 1 9 \\ _8 0 5 3 \\ \hline 8 6 6 6 \end{array}$$

10) $C = 7$

$$\begin{array}{r} _1 7 * 1 * \\ _8 * * * \\ \hline 8 7 7 7 \end{array}$$

$T = 8, \Gamma = 4$ или $\Gamma = 3$.

$$\begin{array}{r} _1 7 3 1 9 \\ _8 5 4 2 \\ \hline 8 7 7 7 \end{array}$$

11) $C = 8$

$$\begin{array}{r} _1 8 * 1 * \\ _9 * * * \\ \hline 9 8 8 8 \end{array}$$

$T = 9, \Gamma = 3$ или $\Gamma = 2$.

Вариантов нет.

12) $C = 9$

$$\begin{array}{r} _1 9 * 1 * \\ _9 * * * \\ \hline 9 9 9 9 \end{array}$$

$T = 9, \quad C = T$ – не удовлетворяет условию задачи.

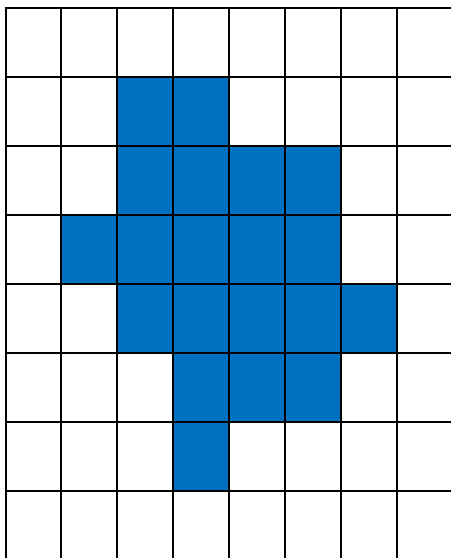
Ответ: $\begin{array}{r} _1 2 7 1 5 \\ _6 4 9 3 \\ \hline 6 2 2 2 \end{array}, \begin{array}{r} _1 2 3 1 7 \\ _6 0 9 5 \\ \hline 6 2 2 2 \end{array}, \begin{array}{r} _1 4 5 1 2 \\ _7 0 6 8 \\ \hline 7 4 4 4 \end{array}, \begin{array}{r} _1 4 5 1 3 \\ _7 0 6 9 \\ \hline 7 4 4 4 \end{array},$

$$\begin{array}{r} _1 6 9 1 3 \\ _8 2 4 7 \\ \hline 8 6 6 6 \end{array}, \begin{array}{r} _1 6 7 1 9 \\ _8 0 5 3 \\ \hline 8 6 6 6 \end{array}, \begin{array}{r} _1 7 3 1 9 \\ _8 5 4 2 \\ \hline 8 7 7 7 \end{array}.$$

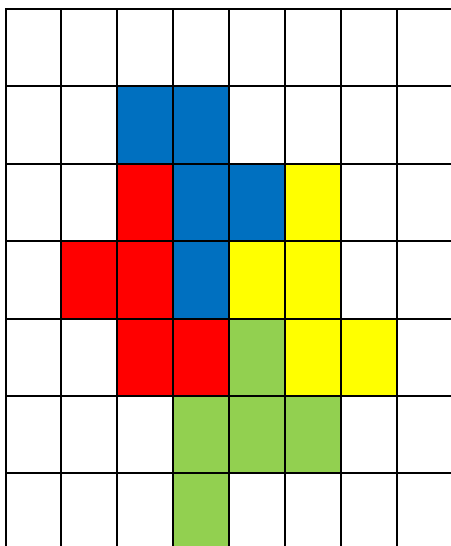
Комментарии.

Баллы	Критерии оценивания задания № 2
7	Полное обоснованное решение
6	Приведен только верный ответ ИЛИ верный ответ без обоснования
3	Показано, что ребус имеет больше одного решения, но дальнейшего содержательного продвижения нет
2	Найден только один правильный ответ
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют ИЛИ решение отсутствует, записан только номер задания

Задача 3. Разрежьте фигуру на 4 равные части.



Решение. Смотри рисунок:



Комментарии.

Баллы	Критерии оценивания задания № 3
7	Верное разрезание, обоснования не требуется
2	Разрезание на неравные фигуры равной площади
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют ИЛИ решение отсутствует, записан только номер задания

Задача 4. В сейфе Чипа лежит куб. Каждая грань куба разделена на 4 равные части. Какое наибольшее число квадратов Дейл может отметить так, чтобы никакие два отмеченных квадрата не имели общих вершин?

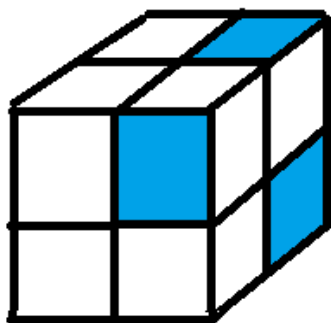
Ответ: 6 квадратов.

Решение. Оценка: **Первый способ.** Каждый квадрат занимает 4 узла (вершины квадрата). Никакие два квадрата, удовлетворяющие условию задачи, не имеют общих узлов. Всего узлов: $9+9+3+3+1+1=26$ (считаем по противоположным граням). Значит, квадратов, не больше чем $26:4=6$ (остаток 2).

ИЛИ

Второй способ. На каждой грани не может находиться более одного отмеченного квадрата. Всего граней – 6, значит, квадратов не более, чем 6.

Пример.



Остальные квадраты расположены симметрично относительно центра куба.

Комментарии.

Баллы	Критерии оценивания задания № 4
7	Полное верное решение
4	Приведена оценка, без примера
3	Приведен только пример, без оценки решения
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют ИЛИ решение отсутствует, записан только номер задания

Задача 5. Из города А в город В, находящемся на расстоянии 300 км от А, выехал автомобиль Kia со скоростью 60 км/ч. Через некоторое время из А в В выехал второй автомобиль Lexus с некоторой большей постоянной скоростью. Сначала он обогнал Kia, а затем, приехав в город В, постоял там 15 мин и поехал обратно в А. На расстоянии 36 км от В он встретил Kia, а когда автомобиль Kia наконец приехал в В, был на расстоянии 90 км от В. Определите, на каком расстоянии от А произошла первая встреча автомобилей. Ответ выразите в километрах.

Ответ: 75.

Решение. 1) $36:60 = 0,6$ (ч) – время движения Kia от второй встречи до В;

2) $(90 - 36) : 0,6 = 54 : 0,6 = 90$ (км/ч) – скорость Lexus;

3) $(300 - 36) : 60 = 5 - 0,6 = 4,4$ (ч) – время движения Kia до второй встречи;

4) $(300 + 36) : 90 + 15:60 = 10:3 + 0,4 + 0,25 = 3 \frac{1}{3} + 0,65$ (ч) – время движения Lexus до второй встречи;

5) $4,4 - 3 \frac{1}{3} - 0,65 = 5/12$ (ч) = 25 мин – время задержки Lexus при выезде;

6) $60t = 90(t - 25) \Rightarrow 30t = 90 \cdot 25 \Rightarrow t = 75$ (минут) - время движения Kia до первой встречи;

7) $60 \cdot 75 / 60 = 75$ (км) – расстояние от А при первой встрече.

Комментарии.

Баллы	Критерии оценивания задания № 5
7	Полное верное решение
6	Приведено верное рассуждение, но допущена вычислительная ошибка
2	Приведено верное решение без обоснования
1	Верно указан ответ при отсутствии решения
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют ИЛИ решение отсутствует, записан только номер задания