11 класс

1. Известно, что для любых действительных чисел $f(x^{2022}+y)=f(x)+f(y^{2022})$. Найти $f(1)$.

Решение:

$f(0)=f(0^{2222}+0)=f(0)+f(0^{2222})=f(0)+f(0)\Rightarrow f(0)=0$

С другой стороны

$f(0)=f(1-1)=f\left(1^{2222}+(-1)\right)=f(1)+f((-1)^{2222})=f(1)+f(1)=$

$=2f(1)$

$2f(1)=0\ \Rightarrow f(1)=0$

Ответ: 0.

2. Известно, что $a^2+b^2=4$, $c^2+d^2=4$, $ad+bc=4$. Найти $ab-cd$.

Решение:

$a^2+b^2=4\Rightarrow\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=1$

$c^2+d^2=4\Rightarrow\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2=1$

Пусть $\cos\alpha=\frac{a}{2},\ \sin\alpha=\frac{b}{2}$

$\cos\beta=\frac{c}{2},\ \sin\beta=\frac{d}{2}$,

тогда а $=2\cos\alpha, b=2\sin\alpha$

с $=2\cos\beta, d=2\sin\beta$

$4=ad+bc=4\cos\alpha\sin\beta+4\sin\alpha\cos\beta\Rightarrow\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta=1$

$\sin(\beta+\alpha)=1$

$\beta+\alpha=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$

$\beta=-\alpha+\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$

$ab-cd=4\cos\alpha\sin\alpha-4\cos\beta\sin\beta=2(\sin 2\alpha-\sin 2\beta)=$

$=2(\sin 2\alpha-\sin 2(-\alpha+\frac{\pi}{2}+2\pi k))=2(\sin 2\alpha-\sin(-2\alpha+\pi+4\pi k))=$

$=2(\sin 2\alpha-\sin(\pi-2\alpha))=2(\sin 2\alpha-\sin 2\alpha)=0$

Ответ: 0.

3. Дана последовательность x_n, члены которой удовлетворяют равенству $x_n = \frac{2x_{n-1} \cdot x_{n+1}}{x_{n-1} + x_{n+1}}$, $x_1 = 30\frac{10}{11}$, $x_{23} = 10\frac{10}{33}$. Найдите $[x_{18}]$, где $[x]$ – целая часть числа x, например, $[2{,}8] = 2$, $[-3{,}2] = -4$.

Решение:

Заметим, что среди членов последовательности не может быть нулей. Действительно, если какой-то член последовательности стоит рядом с нулем, то он тоже нуль. Тогда получим, что $x_1 = 0$, $x_{23} = 0$, что противоречит условию. Значит, равенство $x_n = \frac{2x_{n-1} \cdot x_{n+1}}{x_{n-1}+x_{n+1}}$ равносильно $\frac{1}{x_n} = \frac{\frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_{n+1}}}{2}$. Следовательно, члены $a_1 = \frac{1}{x_1}, a_2 = \frac{1}{x_2}, \dots, a_n = \frac{1}{x_n}, \dots$ образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = \frac{a_{23}-a_1}{22} = \frac{\frac{33}{340} - \frac{11}{340}}{22} = \frac{1}{340}$, $a_{18} = a_1 + 17d = \frac{11}{340} + \frac{17}{340} = \frac{28}{340} = \frac{7}{85}, \frac{1}{x_{18}} = \frac{7}{85}$,

$x_{18} = 12\frac{1}{7}, [x_{18}] = 12.$

Ответ: 12.

4. Найдите наибольшее целое значение дроби $\frac{12xy+5x^2}{x^2+y^2}$.

Решение:

Обозначим $\frac{12xy+5x^2}{x^2+y^2} = t$, $\frac{12\frac{y}{x}+5}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1} = t$.

Обозначим $\frac{y}{x} = c$

$$\frac{12c+5}{c^2+1} = t$$

$$(c^2+1)t = 12c+5$$

$$c^2t - 12c + 5 - 5 = 0$$

$$D_1 = 36 - t(t-5) = 36 - t^2 + 5t \geq 0$$

$$t^2 - 5t - 36 \leq 0$$

$$D_2 = 25 + 36 \cdot 4 = 169 = 13^2$$

$$t_1 = \frac{5-13}{2} = -4, t_2 = \frac{5+13}{2} = 9$$

Наибольшее целое значение дроби равно 9.

Ответ: 9.

5. Решить в натуральных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} 7x^2 - 3y^2 + 4z^2 = 8 \\ 16x^2 - 7y^2 + 9z^2 = -3\text{’} \end{cases}$$

В ответе для найденного решения (x, y, z) записать сумму $x^2 + y^2 + z^2$.

Решение:

Умножим первое равенство на 7, а второе равенство на -3 и сложим полученные равенства. Получим $x^2 + z^2 = 65$. Учитывая, что x и z натуральные числа, перебором находим, что

$$\begin{cases} x = 1 \\ z = 8 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x = 8 \\ z = 1 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x = 4 \\ z = 7 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x = 7 \\ z = 4 \end{cases}.$$

Подставим полученные результаты в любое из данных равенств.

1) Если $x = 1, z = 8$, то $y^2 = 85, y \notin N$

2) Если $x = 8, z = 1$, то $y^2 = 148, y \notin N$

3) Если $x = 4, z = 7$, то $y^2 = 100, y = 10$.

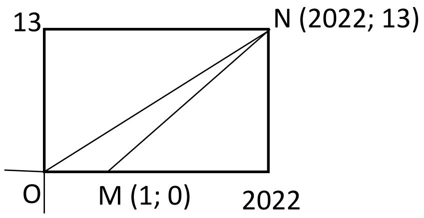
В этом случае $x^2 + y^2 + z^2 = 165$

4) Если $x = 7, z = 4$, то $y^2 = 133, y \notin N$

Ответ: 165.

6. Назовем точку плоскости «интересной», если обе ее координаты – целые числа. Укажите количество «интересных» точек, которые лежат внутри треугольника с вершинами $O(0; 0)$, $M(1; 0)$, $N(2022; 13)$.

Решение:

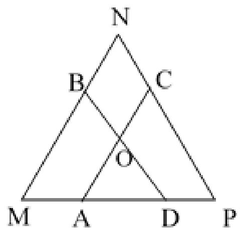


По формуле Пика $S = \frac{n+m}{2-1}$, с другой стороны площадь треугольника

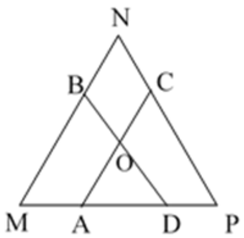
$S = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 1 = \frac{13}{2}$, приравняем $\frac{13}{2} = n + \frac{3}{2} - 1$, $n = 6$.

Ответ: 6.

7. Треугольник MNP – правильный со стороной m. Точки A, B, C, D расположены так, как показано на рисунке. Выполняется равенство $MA + MB = PD + PC = m$, тогда $\angle BOC$ равен?



Решение:



$MA + MB = m = MA + PA$, тогда $PA = MB$, $PD + PC = m = PD + MD$, $MD = PC$, следовательно, $\Delta MBD = \Delta PAC$, $\angle MDB = \angle ACP$, $BD = AC$, $\angle MBD = \angle CAP$; значит в ΔAOD имеем $\angle ODA + \angle OAD = 180° - 60° = 120°$; $\angle AOD = \angle BOC = 60°$.

Ответ: $60°$.

8. Сумма всех коэффициентов приведенного квадратного трехчлена равна 19, а его корни – целые числа. Найдите эти корни. Если корней несколько введите все возможные значения.

Решение:

Пусть приведенное квадратное уравнение имеет вид

$x^2 + px + q = 0$.

Тогда $1 + p + q = 19$,

$(1 - x_1)(1 - x_2) = 19$.

Так как 19 – ПОС простое число, то

1) $1 - x_1 = 1$ и $1 - x_2 = 19$ или 2) $1 - x_1 = -1$ и $1 - x_2 = -19$

$x_1 = 0$ $x_2 = -18$ $x_1 = 0$ $x_2 = 20$

Ответ: 0; -18; 2; 20.

10 класс

1. Известно, что $a^2+b^2=4$ и $c^2+d^2=4$.

Найти наибольшее значение выражения $k=(a+c)^2+(b+d)^2$.

Решение:

$k=(a+c)^2+(b+d)^2=a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2=$

$=a^2+b^2+c^2+d^2+2(ac+bd)=4+4+2(ac+bd)=8+2(ac+bd)$

Рассмотрим векторы $\vec{p}\{a;b\}$ и $\vec{q}\{c;d\}$.

Скалярное произведение $\vec{p}\cdot\vec{q}=|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cdot\cos(\widehat{\vec{p};\vec{q}})=ac+bd$

Наибольшее значение скалярного произведения будет в случае, когда $\cos(\widehat{\vec{p};\vec{q}})=1$, тогда

$ac+bd=|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cdot 1=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{4}\sqrt{4}=4$

Наибольшее значение

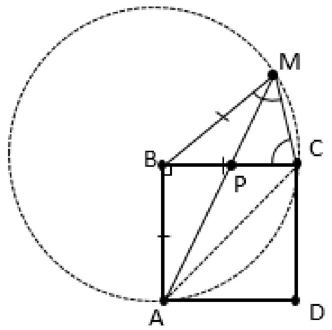
$k_{\text{наиб}}=8+4\cdot 2=8+8=16.$

Ответ: 16.

2. Дан квадрат *ABCD*. Отрезок *AM* пересекает сторону *BC* в точке P, причем $\angle BAM=20°$; $\angle BCM=65°$. Найти градусную меру $\angle CBM$.

Решение:

Проведем в данном квадрате диагональ AC.



$\angle PAC=45°-20°=25°$.

Из условия следует, что $\angle MPC=\angle APB=90°-20°=70°$, а значит, $\angle AMC=180°-70°-65°=45°=\frac{1}{2}\angle ABC$. Поэтому если провести окружность с центром в точке B и радиусом $R=BA=BC$, то точка M будет лежать на этой окружности. Следовательно, $BM=BC$, то есть треугольник BMC равнобедренный.

$\angle CBM=180°-2\cdot 65°=50°$.

Ответ: $50°$.

3. Найти число целых и положительных решений уравнения $\left[\frac{x}{9}\right] = \left[\frac{x}{8}\right]$, где $[\alpha]$ – целая часть α, например, $[9{,}5] = 9$, $[-5{,}6] = -6$.

Решение:

Рассмотрим уравнение более общего вида $\left[\frac{x}{a}\right] = \left[\frac{x}{a-1}\right]$, где a — целое число, $a > 1$. Обе части будут равны нулю при условии $0 \le \frac{x}{a} < \frac{x}{a-1} < 1$, отсюда $0 \le x < a - 1$. Решениями будут $x = 0, x = 1, \dots, x = a - 2$ $(\mathrm{a} - 1$ решений). Пусть теперь $\left[\frac{x}{a}\right] = \left[\frac{x}{a-1}\right] = 1$, т.е. $1 \le \frac{x}{a} < \frac{x}{a-1} < 2$, откуда $\mathrm{a} \le \mathrm{x} < 2(\mathrm{a} - 1)$. Решение $\mathrm{x} = \mathrm{a}, \mathrm{a} + 1, a + 2, \dots, 2\mathrm{a} - 3$ $(\mathrm{a} - 2$ решений). Наконец для $\left[\frac{x}{a}\right] = \left[\frac{x}{a-1}\right] = a - 2$. Найдем $a - 2 \le \frac{x}{a} < \frac{x}{a-1} < a - 1, a^2 - 2a \le x < a^2 - 2a + 1, x = a^2 - 2a$ (одно решение). Если взять $\left[\frac{x}{a}\right] = \left[\frac{x}{a-1}\right] = a - 1, a, a + 1, \dots$ то решений не будем иметь. Всего решений $(a - 1) + (a - 2) + (a - 3) + \dots + 2 + 1 = \frac{a(a-1)}{2} = C_a^2$. При $a = 9$ получаем 36 решений.

Ответ: 36

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = 13 \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 8y + 20} + \sqrt{x^2 + y^2 - 10x - 16y + 89} = 5 \end{cases}$$

В ответе для найденного решения $(x; y)$ записать сумму $x + y$.

Решение:

Выделим под знаком каждого корня квадраты двучленов относительно переменных x и y, получим систему

$$\begin{cases} 2x + y = 13 \\ \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-8)^2} = 5 \end{cases}$$

Второе уравнение системы означает, что сумма расстояний от точки $M(x; y)$ до точек $A(2; 4)$ и $B(5; 8)$ равна 5, при этом $AM + BM \ge AB$; расстояние $AB = \sqrt{(5-2)^2 + (8-4)^2} = 5$. Отсюда следует, что равенство достигается тогда и только тогда, когда точка M будет лежать на отрезке AB, т.е. её координаты будут удовлетворять уравнению прямой, проходящей через точки A и B. Это уравнение имеет вид $y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$. При этом $x \in [2; 4], y \in [5; 8]$. Итак, исходная система равносильна следующей

$$\begin{cases} 2x + y = 13 \\ y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} \end{cases}$$

Решая эту систему находим $x = 3{,}5, y = 6$.

Ответ: 9,5

5. Дана возрастающая арифметическая прогрессия $a_0, a_1, \dots, a_{100}$, состоящая из положительных чисел. Известно, что $a_0 = 25$ и выполняется равенство.

$$\frac{1}{\sqrt{a_0} + \sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{99}} + \sqrt{a_{100}}} = 1$$

Найти разность прогрессии.

Решение:

В данном равенстве в каждом члене избавимся от иррациональности в знаменателе и произведем сложение

$$\frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_0}}{a_1 - a_0} + \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{a_2 - a_1} + \dots + \frac{\sqrt{a_{100}} - \sqrt{a_{99}}}{a_{100} - a_{99}} = \frac{\sqrt{a_{100}} - \sqrt{a_0}}{d} = \frac{\sqrt{a_{100}} - 5}{d} = 1$$

$$\sqrt{a_0 + 100d} = d + 5$$

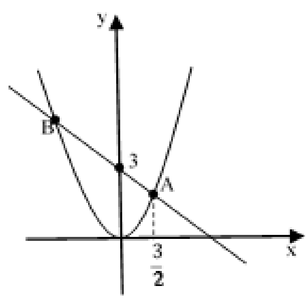
$$25 + 100d = d^2 + 10d + 25$$

$$d^2 = 90d$$

$$d = 0, d = 90.$$

Ответ: 90

6. Прямая $y = ax + b$ пересекает параболу $y = x^2$ в двух точках A и B. Найти абсциссу точки B.



Решение:

Рассмотрим уравнение $x^2 = ax + b$.

$x^2 - ax - b = 0$ — уравнение, имеющее согласно условию задачи 2 корня: $x_1 = \frac{3}{2}, x_2$ — абсцисса точки B.

$x_1 \cdot x_2 = -b,\ b$ — ордината точки пересечения прямой с осью 0y.

$b = 3$, следовательно $\frac{3}{2} \cdot x_2 = -3 \Rightarrow x_2 = -2$.

Ответ: -2.

7. Васе дали три банки с краской и сказали покрасить забор. Краска в банках разного цвета. Сколькими различными способами Вася может покрасить забор, состоящий из 13 досок, так, чтобы любые две соседние доски были разных цветов, причем нужно использовать все имеющиеся цвета.

Решение:

Забор состоит из 13 досок, по условию две соседних доски должны быть разного цвета.

1 доска – любой из трех цветов,

2 доска – любой из двух оставшихся цветов,

3 доска -—опять-таки любой из двух цветов отличных от цвета 2 доски,

4 доска – любой из двух цветов отличных от цвета 3 доски.

Далее, оставшиеся 9 досок, также будут покрашены в любой из двух цветов, отличных от предыдущей доски. Получаем, что 12 досок может быть покрашено в любой из 2-х цветов, а 1 доска (первая) – в любой из 3-х цветов, значит количество вариантов составит: $3 \cdot 2^{12} = 12 \cdot 1024 = 12288$.

Поскольку, по условию, должны быть использованы краски всех трех цветов, то надо исключить вариант того, что 1 доска будет покрашена в любой из 3 цветов, а остальные 12 досок будут покрашены в оставшиеся 2 цвета . Количество таких вариантов будет: $3 \cdot 2 = 6$.

Значит количество вариантов покраски забора при использовании всех трех цветов будет: $12288 - 6 = 12282$.

Ответ: 12282.

8. Сколько процентов 4 процента составляют от 50 процентов?

Решение:

Пусть а – какое-либо число, 50% этого числа составляет число $0{,}5a$, 4% этого числа составляет число $0{,}04a$.

Тогда 4% от 50% составляют $\frac{0{,}04a}{0{,}5a} * 100\% = 0{,}08 * 100\% = 8\%$.

Ответ: 8.

9 класс

1. Один магазин продавал напитки, а второй магазин продавал мучные изделия. В некоторый момент времени первый магазин перестал продавать напитки, а начал продавать мучные изделия. В тот же самый момент второй магазин перестал продавать мучные изделия, а начал продавать напитки. Второй магазин и напитки, и мучные изделия распродает быстрее, чем первый в 2 раза. Известно, что мучных изделий было продано поровну, а напитков было продано 100 ящиков. Сколько ящиков напитков продал 2-ой магазин?

Решение:

Оба магазина продали одинаковое количество мучных изделий. Поскольку второй магазин все делает быстрее, то времени на продажу мучных изделий второй магазин потратил в 2 раза меньше, чем первый. Тогда напитки второй магазин продавал в 2 раза дольше. Поскольку скорость продажи напитков у второго магазина в 2 раза выше, чем у первого, то напитков второй магазин продал в 4 раза больше, чем первый.

Если первый магазин продал x ящиков напитков, то второй продал $4x$.

$x + 4x = 100 \Rightarrow 5x = 100 \Rightarrow x = 20$ – продал первый магазин.

$4x = 80$ – продал второй магазин.

Ответ: 80.

2. Процент числа сотрудников отдела, переболевших covid-19, заключен в пределах от 96,4% до 96,5%. Найти наименьшее возможное количество сотрудников в отделе.

Решение:

Пусть всего в отделе n человек, а число не переболевших covid-19 людей равно k, тогда

$$1 - 0{,}965 \leq \frac{k}{n} \leq 1 - 0{,}964$$

$$0{,}035 \leq \frac{k}{n} \leq 0{,}036.$$

Наименьшее значение n будет в случае, когда $k = 1$.

Итак, $0{,}035 \le \frac{1}{n} \le 0{,}036$.

Следовательно,

$$\frac{1000}{36} \le n \le \frac{1000}{35}$$

$$27\frac{28}{36} \le n \le 28\frac{20}{35}$$

$n = 28$.

Ответ: 28.

3. Алиса Екупова зашифровала свою имя и фамилию, вместо каждой буквы взяла цифру. Одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры. Потом все записанные цифры она сложила и получилось 57. Какая цифра соответствует букве А.

Решение:

В словосочетании <u>А</u>ЛИС<u>А</u> ЕКУПОВ<u>А</u> буква А встречается 3 раза. Остальные 9 букв: Л, И, С, Е, К, У, П, О, В встречаются по 1 разу.

Таким образом, поскольку всего разных букв 10, то в шифровании участвуют все 10 цифр, причем цифра, соответствующая букве А, встречается 3 раза. Обозначим эту цифру a.

Сумма всех 10 цифр, включая цифру a один раз равна: $0 + 1 + \ldots + 9 = 45$.

В условии сказано, что сумма цифр, участвующих в шифровании, равна 57, значит $45 + 2a = 57 \Rightarrow\ 2a = 12 \Rightarrow\ a = 6$.

Ответ: 6.

4. Известно, что двузначное число X имеет пять делителей. Число $X - 1$ имеет 10 делителей. Сколько делителей имеет число $X + 1$?

Решение:

Так как двузначное число X имеет пять делителей, то оно является полным квадратом. Определим, какие из чисел 16, 25, 36, 49, 64, 81 имеют 5 делителей.

$16 = 2^4 \Rightarrow 16$ имеет 5 делителей: $1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$.

$25 = 5^2 \Rightarrow 25$ имеет 3 делителя: $1, 5, 5^2$.

$36 = 2^2 \cdot 3^2 \Rightarrow 36$ имеет 9 делителей: $1, 2^1, 2^2, 3^1, 3^2, 2 \cdot 3, 2^2 \cdot 3, 2 \cdot 3^2, 2^2 \cdot 3^2$.

$49 = 7^2 \Rightarrow 49$ имеет 3 делителя: $1, 7, 7^2$.

$64 = 2^6 \Rightarrow 64$ имеет 7 делителей: $1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$.

$81 = 3^4 \Rightarrow 81$ имеет 5 делителей: $1, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4$.

Итак, $X = 16$ или $X = 81$.

Если $X = 16$, то $X - 1 = 15 = 3 \cdot 5$. Число 15 имеет 4 делителя.

Если $X = 81$, то $X - 1 = 80 = 2^4 \cdot 5$. Число 80 имеет 10 делителей.

Итак, $X = 81$.

Тогда $X + 1 = 82 = 2 \cdot 41$.

$X + 1$ имеет 4 делителя: $1, 2, 41, 82$.

Ответ: 4.

5. В игровом зале 24 компьютера, часть из них Lenovo, оставшиеся ASUS. За каждым компьютером сидел либо рыцарь, либо лжец. Каждый из сидевших говорил, что он сидит за Lenovo. Затем все люди пересаживаются. Теперь половина (т. е. 12 человек) говорят, что сидят за ASUS. Сколько лжецов теперь сидит за Lenovo?

Решение:

Так как каждый из сидевших сначала говорил, что сидит за Lenovo, то получается, что все лжецы сидят за Asus, причем только лжецы. А за Lenovo сидят только рыцари, причем все рыцари.

Пусть X рыцарей потом пересели за Asus. Тогда на их освободившиеся места пересели X лжецов.

12 человек сказали, что сидят за Asus. Это могли сказать X рыцарей, которые сели за Asus, и X лжецов, которые пересели за Lenovo.

Итак, $X + X = 2X = 12 \Rightarrow X = 6$.

Ответ: 6.

6. Петя задумал натуральное число n. Оказалось, что это число делится на все натуральные числа, не большие $\frac{n}{10}$. Какое наибольшее число n мог задумать Петя?

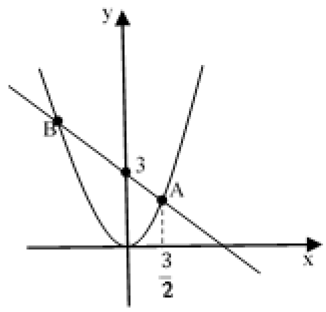
Решение:

Если число $n > 60$ обладает нужным свойством, то оно делится на

$3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. Поэтому $\frac{n}{10}$ целое число. Обозначим его m. Тогда n делится на $m - 1$. Но $10(m - 1) = n - 10$, поэтому 10 делится на $m - 1$. Откуда $m \leq 11$, $n \leq 110$. С другой стороны, $n > 60$ и n делится на 60 — противоречие.

Ответ 60.

7. Прямая $y = ax + b$ пересекает параболу $y = x^2$ в двух точках A и B. Найти абсциссу точки B.



Решение:

Рассмотрим уравнение $x^2 = ax + b$.

$x^2 - ax - b = 0$ — уравнение, имеющее согласно условию задачи 2 корня: $x_1 = \frac{3}{2}, x_2$ — абсцисса точки B.

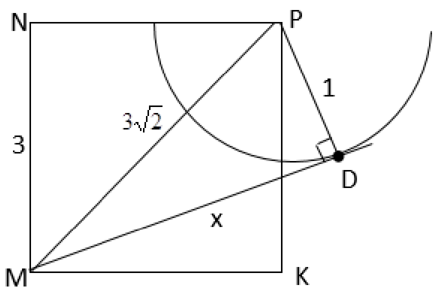
$x_1 \cdot x_2 = -b, b$ — ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

$b = 3$, следовательно $\frac{3}{2} \cdot x_2 = -3 \Rightarrow x_2 = -2$.

Ответ: -2.

8. Дан квадрат $MNPK$. Сторона квадрата равна 3. Построили окружность w радиуса 1 с центром в точке P. Из точки M к окружности w проведли касательную (точка D – точка касания). Найти квадрат MD.

Решение:



Так как радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, то

$MD^2 = MP^2 - PD^2$

$$x^2 = (3\sqrt{2})^2 - 1^2 = 17 \Rightarrow x = \sqrt{17}$$

Ответ: 17.

8 класс

1. На столе лежало 100 монет решкой вверх. Петя перевернул 30 из них. Затем Вася перевернул какие-то 80 монет. Потом Миша перевернул 40 монет. В результате все монеты оказались лежащими орлом вверх. Сколько монет было перевернуто 3 раза?

Решение:

Поскольку все монеты, лежавшие решкой вверх, оказались потом лежащими орлом вверх, то каждая монета была повернута либо 1 раз, либо 3.

Если б какая-то монета была перевернута 2 раза, то она оказалась бы лежащей решкой вверх. Пусть x монет было перевернуто 3 раза, тогда $100 - x$ монет перевернуто 1 раз.

Всего переворотов мальчики совершили:

$x \cdot 3 + 100 - x = 30 + 80 + 40$

$2x + 100 = 150$

$2x = 50$

$x = 25.$

Ответ: 25.

2. В больнице сейчас (например, 1 ноября 2022 года) находились больные гриппом и больные covid-19. Больных, у которых и грипп, и covid-19 нет. Если число больных covid-19 увеличится в трое (т.е. поступят новые больные), то общее число больных увеличится на 146%. На сколько процентов уменьшится число больных (по сравнению с 1 ноября), если выпишут $\frac{1}{3}$ всех больных гриппом?

Решение:

Пусть x – число больных covid-19. Если это число увеличится втрое, т. е. станет $3x$, то число больных увеличится на $3x - x = 2x$ человек.

По условию, число больных увеличится на 146%, значит $2x$ есть 146%, тогда x составляют 73% от числа всех больных.

Следовательно, процент больных гриппом равен 27.

Если выпишут $\frac{1}{3}$ больных гриппом, то выпишут $27\% \cdot \frac{1}{3} = 9\%$ больных.

Ответ: 9.

3. При каких n число $\frac{2n+3}{n-2}$ является целым? В ответе указать сумму всех значений n.

Решение:

$\frac{2n+3}{n-2} = \frac{2n-4+7}{n-2} = \frac{2n-4}{n-2} + \frac{7}{n-2} = 2 + \frac{7}{n-2}$.

Число $2 + \frac{7}{n-2}$ является целым.

Тогда $n - 2 = 7$, или $n - 2 = -7$, или $n - 2 = 1$, или $n - 2 = -1$,

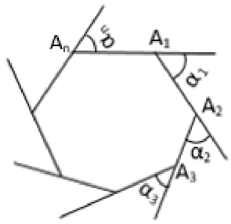
Отсюда $n = 9$, или $n = -5$, или $n = 3$, или $n = 1$.

$9 - 5 + 3 + 1 = 8$.

Ответ: 8.

4. Определите число сторон выпуклого n-угольника, сумма углов которого равна сумме внешних углов некоторого выпуклого 2022-угольника.

Решение:



Сумма внешних углов любого выпуклого многоугольника равна $360°$. Покажем это.

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – внешние углы многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$. $\alpha_i = 80° \cdot A_i$. Сумма внутренних углов многоугольника $S = (n-2) \cdot 180°$.

Сумма внешних углов: $\alpha_1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 180° - \angle A_1 + 180° - \angle A_2 + \dots + 180° - \angle A_n = 180° \cdot n - (\angle A_1 + \angle A_2 + \dots \angle A_n) = 180° \cdot n - (n-2) \cdot 180° = 180° \cdot n - 180° \cdot n + 360° = 360°$.

Итак, сумма углов выпуклого 2022-угольника равна $360°$. Определим вид многоугольника у которого сумма углов равна $360°$.

$(n-2) \cdot 180° = 360° \Rightarrow n - 2 = 2 \Rightarrow n = 4$.

Значит искомый многоугольник имеет 4 стороны.

Ответ: 4.

5. Известно, что $x^2 - 2x = 5$. Найдите значение выражения $x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 16x - 4$.

Решение:

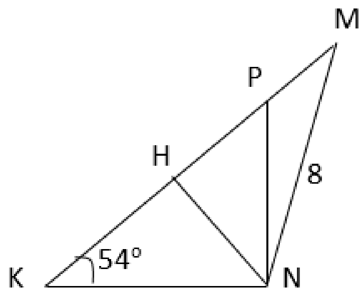
$(x^2 - 2x)^2 = 25,\ x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 25$

$x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 16x - 4 = (x^4 - 4x^3 + 4x^2) + 8x^2 - 16x - 4 =$
$(x^2 - 2x)^2 + 8(x^2 - 2x) - 4 = 5^2 - 8 \cdot 5 - 4 = 61.$

Ответ: 61.

6. Дан треугольник MNK. $MN = 8$, $\angle MNK = 96°$, $\angle NKM = 54°$. Найдите расстояние от точки N до прямой MK.

Решение:



Проведем NP так, чтобы угол KNP равнялся $90°$, $\angle PNM = 6°$, $\angle NPK = 36°$, проведем NH перпендикулярно KM, $\angle KNH = 36°$, $\angle HNP = 90° - 36° = 54°$, $\angle HNM = 54° + 6° = 60°$, $\angle NMH = 30°$, следовательно, NH катет, лежащий напротив угла в $30°$, значит $NH = 8/2 = 4$.

Ответ: 4.

7. Сколько страниц в книге, если для их нумерации потребовалось 2022 цифры?

Решение:

Если номер страницы – однозначное число, то для записи номера нужна 1 цифра, если номер страницы – двузначное число, то нужно 2 цифры, если номер страницы – трехзначное число, то нужны 3 цифры для записи номера.

Для нумерации первых 9 страниц требуется 9 цифр, для нумерации страниц с номерами от 10 до 99 требуется $90 \cdot 2 = 180$ цифр.

Пусть x страниц книги, номер которых – трехзначное число. Тогда, если в книге нет страниц, номера которых больше 999, то $2022 = 9 + 180 + 3x \Rightarrow 3x = 1833 \Rightarrow x = 611$.

Итак, в книге 611 страниц, номер которых – трехзначное число. Значит всего в книге $611 + 90 + 9 = 710$ страниц.

Ответ: 710.

8. Саша возвел ненулевое число a в 6 степень, и оно увеличилось в трое. Во сколько раз увеличится число a, если его возвести в одиннадцатую степень?

Решение:

$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = 3 \cdot a$ или $a^6 = 3a$;

$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = 3$ или $a^5 = 3$;

$(a^5)^2 = (3)^2$;

$a^{10} = 9$;

$a^{10} \cdot a = 9 \cdot a$;

$a^{11} = 9 \cdot a$

Ответ: 9.

7 класс

1. В урне 35 шаров: синих, белых и красных. Среди любых 15 шаров хотя бы один красный или белый. Среди любых 19 шаров хотя бы один синий или белый. Найти наименьшее возможное число белых шаров в урне.

Решение:

Так как среди 15 шаров хотя бы один красный или белый, то количество синих шаров ≤ 14. Так как среди любых 19 шаров хотя бы один синий или белый, то количество красных шаров ≤ 18. Таким образом, общее количество синих и красных шаров ≤ 32, а значит количество белых $\geq 35-32=3$. Итак, наименьшее количество белых шаров равно 3.

Ответ: 3.

2. У Малыша были шоколадные и карамельные конфеты, причем шоколадных 99%. Карлсон съел некоторое количество шоколадных конфет, в результате шоколадных конфет оказалось 98% от всех оставшихся конфет. Сколько процентов конфет съел Карлсон?

Решение:

Пусть x – общее число конфет. Тогда, т. к. карамельных конфет 1%, то число карамельных конфет равно $0{,}01x$.

Карлсон ел только шоколадные конфеты, число карамельных не изменилось, но теперь они составляют 2% от общего числа конфет, поэтому общее число конфет стало $\frac{0{,}01x}{0.02}=\frac{x}{2}$.

Следовательно, Карлсон съел $x-\frac{x}{2}=\frac{x}{2}$ конфет, что составляет половину всех конфет, то есть 50%.

Ответ: 50.

3. Пятизначное число A поделили на двузначное число B в столбик. В результате получилось число C.
Процесс деления представлен на рисунке. Найти число A.

```
_*****  |**
 ***    |**8
 ---
  _**
   **
   --
    0
```

Решение:

Вторая цифра в частном равна 0.

$$
\begin{array}{r|l}
-{*}{*}{*}{*}{*} & {*}{*} \\
\underline{{*}{*}{*}\phantom{{*}{*}}} & {*}{*}8 \\
-{*}{*} & \\
\underline{{*}{*}} & \\
0 &
\end{array}
$$

При умножении делителя на 8 получается двузначное число, при умножении делителя на цифру частного получается трехзначное число, значит делитель может быть только числом 12, а первая цифра частного равна 9.

$$\begin{pmatrix} 8 \cdot 12 = 96 - \text{двузначное число} \\ 9 \cdot 12 = 108 - \text{трехзначное число} \end{pmatrix}$$

Первые три цифры делимого образуют число 108, последние две цифры делимого образуют число 96.

$$
\begin{array}{r|l}
-10896 & 12 \\
\underline{108} & 908 \\
-96 & \\
\underline{96} & \\
0 &
\end{array}
$$

Ответ: 10896.

4. Известно, что двузначное число X имеет 7 делителей. Сколько делителей имеет число $X + 1$?

Решение:

Двузначное число X имеет 7 делителей. Так как число делителей нечетно, то X – полный квадрат. Выясним, какие из чисел 16, 25, 36, 49, 64, 81 имеют 7 делителей.

$16 = 2^4 \Rightarrow 16$ имеет 5 делителей: $1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$.

$25 = 5^2 \Rightarrow 25$ имеет 3 делителя: $1, 5, 5^2$.

$36 = 2^2 \cdot 3^2 \Rightarrow 36$ имеет 9 делителей: $1, 2^1, 2^2, 3^1, 3^2, 2 \cdot 3, 2^2 \cdot 3, 2 \cdot 3^2, 2^2 \cdot 3^2$.

$49 = 7^2 \Rightarrow 49$ имеет 3 делителя: $1, 7, 7^2$.

$64 = 2^6 \Rightarrow 64$ имеет 7 делителей: $1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$.

$81 = 3^4 \Rightarrow 81$ имеет 5 делителей: $1, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4$.

Итак, 7 делителей имеет только число 64.

Тогда $X + 1 = 65 = 5^1 \cdot 13^1$.

$X + 1$ имеет 4 делителя: 1б 5б 13, 65.

Ответ: 4.

5. Натуральные числа записаны подряд: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 …

Какая цифра стоит на 2022 месте?

Решение:

Для записи любого однозначного числа требуется 1 цифра, двузначного – 2 цифры, трехзначного – 3. Однозначных чисел 9, двузначных – 90, поэтому для записи чисел от 1 до 99 нужно $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 = 189$ цифр. Поскольку $(2022 - 189){:}\,3 = 1833{:}\,3 = 611$, то искомая цифра является последней в записи трехзначного числа, стоящего среди трёхзначных на 611 месте. Таким числом является число 710, так как $611 + 99 = 710$.

Итак, искомая цифра 0.

Ответ: 0.

6. Найдите наименьшее целое положительное число m, удовлетворяющее равенству

$[12{,}4 \cdot m] = 86$, где

$[\alpha]$ – целая часть α, например, $[8{,}6] = 8$, $[-4{,}2] = -5$.

Решение:

Из условия по определению функции $[x]$ имеем: $12{,}4m = 86 + \theta, 0 \leq \theta < 1$

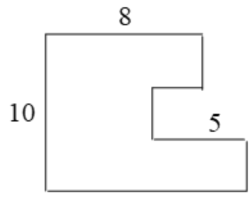
Умножим члены неравенства на 5: $62m = 430 + 5\theta$, откуда $m = \frac{430+5\theta}{62} = 6 + \frac{58+5\theta}{62}$,

Т.к. $0 \leq \theta < 1$, то $0 \leq 5\theta < 5$.

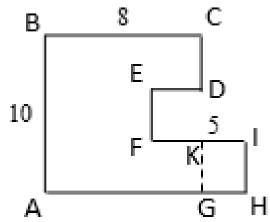
Чтобы получить целое положительное m, число $t = \frac{58+5\theta}{62}$ должно быть целым. Полагая *t=1* получаем $\theta = \frac{4}{5}$ и заметим, что t принимает единственное значение, равное 1. Следовательно, m=7

Ответ: 7.

7. Найдите периметр фигуры.



Решение:



$P = AB + BC + CD + DE + EF + FI + IH + (HG + AG) = AB + BC + (CD + EF + IH) + (DE + GH) + AG + FI$

Заметим, что $CD + EF + IH = AB = 10$,

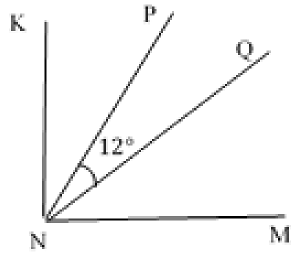
$DE + GH = FI = 5$,

$AG = BC = 8$.

Поэтому $P = 10 + 8 + 10 + 5 + 5 + 8 = 46$.

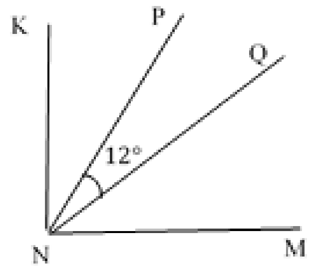
Ответ: 46.

8. $\angle MNK = 90°$; $\angle PNQ = 12°$. Посчитали все острые углы между любыми парами лучей (не обязательно соседних). Оказалось, что сумма самого большого и самого маленького равна 75°. Укажите величину наибольшего угла, образованного соседними лучами.



Решение:

Пусть $\angle PNK = x°$.



Посчитаем все возможные углы

$\angle MNK = 90°$; $\angle PNQ = 12°$; $\angle PNK = x°$;

$\angle KNQ = 12° + x$; $\angle PNM = 90° - x° = 12° + y°$;

$\angle MNQ = y°$.

Имеем $90° - 12° = y° + x°$; $78° = y° + x°$, а $75° = y° + 12° + 12°$; $51° = y°$.

Ответ: 51°.